ÉTUDE THÉORIQUE

DU

RENDEMENT RÉEL

DES

MACHINES A VAPEUR

APPLICATION AUX LOCOMOTIVES

Par **M. NADAL**, Ingénieur au Corps des mines.

(Extrait des ANNALES DES MINES, livraison de Juin 1893.)

PARIS

Vve CH. DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES DES MINES
ET DES TÉLÉGRAPHES

Quai des Augustins, 49

1893

IMPRIMERIE C. MARPON ET E. FLAMMARION
RUE RACINE. 26, A PARIS.

621.1
N12e

ÉTUDE THÉORIQUE

DU

RENDEMENT RÉEL DES MACHINES A VAPEUR

APPLICATION AUX LOCOMOTIVES

Par M. NADAL, Ingénieur au Corps des mines.

CHAPITRE I.

THÉORIE DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR DANS LES PAROIS DES CYLINDRES DES MACHINES A VAPEUR.

I. *Objet de l'étude.*

Dans le travail qui va suivre, nous développons la théorie mathématique des machines à vapeur d'eau saturée. Cette théorie permet de calculer le rendement exact d'une machine avec une approximation qui ne dépend que de la plus ou moins grande précision qu'on apporte au tracé d'une série d'épures. Elle s'applique tout aussi bien à une machine en projet qu'à une machine construite.

II. *Rôle des parois des cylindres.*

La vapeur, pendant son admission dans un cylindre, perd sa chaleur de deux façons : en produisant du travail et en réchauffant les parois métalliques avec lesquelles

b 54042

elle est en contact. Ce dernier phénomène entraîne la condensation d'une partie de la vapeur, qui est ainsi introduite en pure perte. Si on parvient à déterminer la quantité de vapeur condensée à chaque coup du piston, il devient ensuite facile de savoir quelle est la quantité totale de vapeur dépensée.

La première question, qui se pose, est celle de savoir si les effets thermiques qui se produisent dans un cylindre, sont dus en totalité à l'action des parois métalliques ou sont dus, en partie, à la présence permanente d'une quantité notable d'eau, qui n'est pas expulsée pendant l'échappement et qui permet d'expliquer ces effets thermiques, comme l'a démontré Zeuner. La présence d'eau stagnante n'est, d'ailleurs, qu'une pure hypothèse et rien n'a permis, jusqu'ici, d'en vérifier l'exactitude. Hirn et l'École alsacienne ont soutenu qu'il ne pouvait pas y avoir, en permanence, dans les fonds d'un cylindre, une quantité d'eau notable et que l'existence d'une très petite quantité d'eau ne pouvait avoir aucune influence sur les déductions générales tirées de la théorie expérimentale de Hirn. Ces conclusions ont été appuyées par les expériences de MM. Hirn et Hallauer et elles sont généralement admises. Nous posons donc comme principe que les effets thermiques, qui se produisent dans un cylindre, sont dus à l'action des parois métalliques sur la vapeur et qu'on peut négliger la perte de chaleur qu'éprouve la vapeur, affluant au commencement de l'admission, pour réchauffer la petite quantité de vapeur humide qui se trouve dans le cylindre à la fin de la compression.

Il y a des échanges de chaleur tantôt positifs, tantôt négatifs, entre les parois métalliques et la vapeur saturée, contenant une certaine proportion d'eau. L'action des parois consiste à prendre ou à céder de la chaleur à une masse de vapeur saturée, d'où résultent des condensations ou des vaporisations partielles. Mais il n'en résulte

pas que la température du fluide évoluant soit sensiblement influencée par cette action des parois ; c'est ainsi que pendant l'admission et l'échappement, la température de la vapeur est à peu près indépendante des échanges de chaleur avec les parois. Nous verrons plus loin (§ 12) dans quelle faible mesure elle en dépend.

Les échanges de chaleur entre la vapeur et les parois sont évidemment réglés par les lois ordinaires de la propagation de la chaleur. Que la vapeur ne soit pas en contact immédiat avec les parois, mais qu'elle en soit séparée par une couche très mince de rosée, comme cela doit avoir lieu par suite des condensations qui se produisent, cela ne modifie pas les lois générales de la transmission de la chaleur et ne peut influer que sur la valeur inconnue du coefficient de conductibilité extérieure des parois.

Il s'agit donc d'appliquer les lois générales de la transmission de la chaleur aux parois métalliques d'un cylindre qui sont en contact avec un fluide composé de vapeur saturée et d'eau en proportion variable, mais faible en général. La température de ce fluide n'est pas constante ; elle varie suivant une loi révélée par les diagrammes de l'indicateur de pression.

Pour pouvoir ramener le problème à un cas simple : celui de la propagation linéaire de la chaleur dans un mur indéfini, il faut voir si on peut considérer la propagation de la chaleur dans les parois d'un cylindre comme étant linéaire et si on peut appliquer à ces parois la loi de propagation dans un mur ayant une épaisseur infinie.

On est autorisé à considérer une paroi, qui, dans le fait, n'a que de $0^m,025$ à $0^m,03$ d'épaisseur, comme infinie, pourvu que le mouvement de chaleur qui se produit n'affecte qu'une petite épaisseur voisine de la surface. Or c'est ce qui a lieu dans un cylindre. La durée d'un coup de piston est très faible : une seconde, au plus, dans les

machines les plus lentes faisant 30 tours à la minute (*). Pendant cette durée très petite, la chaleur ne peut se propager que sur une épaisseur très faible des parois, de sorte que la plus grande partie de cette épaisseur n'est pas affectée, ou du moins l'est très peu, par les variations intérieures de la température.

Ce fait, annoncé par le calcul, a été vérifié expérimentalement.

Les expériences de Hirn ont montré que la chaleur cédée aux parois pendant l'admission et une partie de la détente est restituée pendant la seconde partie de la détente et pendant l'échappement. Par conséquent cette chaleur ne traverse pas les parois. La quantité qui les traverse est mesurée par le refroidissement externe et elle n'est que le vingtième ou le trentième de la chaleur totale échangée pendant un tour de manivelle. Elle est d'ailleurs constante; donc la température sur la surface extérieure du cylindre est constante.

Ces faits ont aussi été confirmés par les expériences récentes de M. Bryan Donkin. M. Donkin a inventé un appareil qui permet d'étudier les températures des parois d'un cylindre. Il résulte de ses observations que ces parois doivent être considérées comme composées de deux parties distinctes, AC et AB (*fig.* 1). En un certain point, A, cessent les oscillations de température qui se produisent

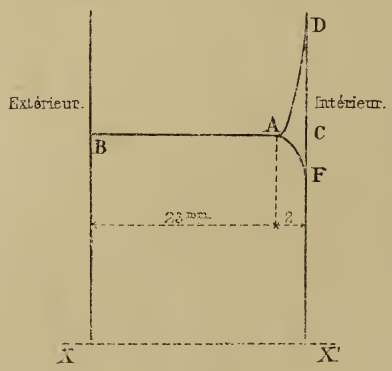


Fig. 1.

(*) On rencontre dans l'exploitation des mines des machines ne faisant que quinze à dix-huit tours par minute; mais ce sont de rares exceptions.

dans l'intérieur pendant chaque révolution. Dans la partie AB, il y a toujours flux de chaleur vers l'extérieur. La courbe des températures dans la région AB, à régime constant, s'écarte très peu de l'horizontale pour une paroi munie d'une bonne enveloppe protectrice de feutre. L'épaisseur de AB a été trouvée égale à 23 millimètres et celle de AC à 2 millimètres seulement.

On peut donc considérer comme établi, que le mouvement de la chaleur n'affecte, à chaque révolution, qu'une faible épaisseur de la paroi.

Le mouvement de la chaleur peut-il être considéré comme linéaire, c'est-à-dire, peut-on négliger les transmissions de chaleur qui se produisent longitudinalement?

M. Donkin a constaté que la température moyenne de la paroi du cylindre est plus élevée aux deux bouts du cylindre qu'au milieu. D'autre part, en calculant les échanges de chaleur comme nous l'indiquerons plus loin, sans tenir compte de la propagation longitudinale, on peut déterminer qu'elle est la température moyenne de la paroi en chaque point du cylindre; on trouve ainsi que cette température est plus élevée aux deux bouts qu'au milieu et le calcul donne le maximum de l'écart possible, qui est généralement assez faible. Il y a donc dans la partie AB de la paroi une propagation longitudinale qui dépend d'un écart de températures peu important et d'une surface qui s'élève, en moyenne, à 1 ou 2 centièmes de la surface intérieure du cylindre. La quantité de chaleur transmise longitudinalement par la section AB ne peut donc être qu'une très petite partie de la chaleur totale mise en mouvement. Mais de plus, nous avons vu plus haut que le mouvement de la chaleur échangée, à chaque tour, entre la vapeur et les parois n'affecte qu'une petite épaisseur, AC (*fig.* 2). Lorsque le piston est dans une position quelconque, par exemple en C′, tout près du fond du cylindre, et que l'admission se fait dans l'espace α, la

vapeur cède de la chaleur par une surface qui comprend le fond du cylindre, la surface du piston et une portion cylindrique; cette chaleur pénètre dans la paroi et il ne s'en échappe longitudinalement qu'une fraction proportionnelle à la surface de la couronne annulaire A'C', qui n'a que quelques millimètres d'épaisseur. Cette surface est donc très petite et la quantité de chaleur transmise longitudinalement est, elle-même, excessivement faible et peut être négligée.

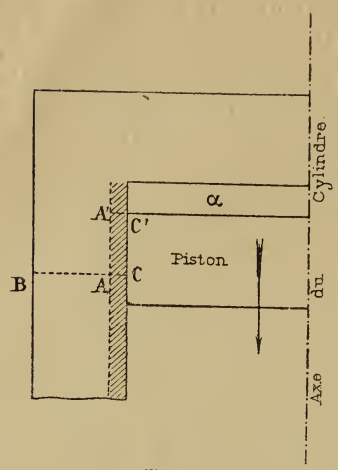


Fig. 2.

On peut donc admettre que le mouvement de la chaleur est linéaire.

III. *Équations différentielles du mouvement de la chaleur.*

Le fait que le mouvement de la chaleur n'affecte qu'une petite épaisseur voisine de la surface et que dans le reste de l'épaisseur la température peut être considérée comme constante, permet d'assimiler les parois d'un cylindre à un mur d'épaisseur infinie, ce qui constitue un cas simple de la propagation de la chaleur.

On peut aussi imaginer un autre cas, encore plus simple à un certain point de vue, auquel peut tout aussi bien être assimilé le cas des parois d'un cylindre.

Considérons, par exemple, un mur d'épaisseur 2X, limité par deux plans infinis (*fig.* 4, Pl. XIV). Sur chaque face de ce mur se trouve une même source de chaleur. Si on envisage la propagation de la chaleur pendant un temps assez petit pour que le flux de chaleur n'ait pas

encore atteint le plan OY, la loi de propagation sur chaque face est évidemment la même que si le mur avait une épaisseur infinie. Dans le nouveau cas que nous considérons, tout est symétrique par rapport au plan médian OY.

Nous allons donc étudier la propagation de la chaleur dans un mur limité par deux plans parallèles et tel que tout soit symétrique par rapport au plan médian. En ce qui concerne notamment l'état initial, si

$$v = F(x)$$

représente cet état initial, la fonction $F(x)$ ne doit pas changer quand on remplace x par $-x$ et doit, par conséquent, être une fonction paire de x.

La source de chaleur agissant sur les deux faces du mur considéré est entretenue à une certaine température, qui peut être constante ou variable avec le temps.

Il s'agit de déterminer les états successifs du solide pendant toute la durée de l'échauffement.

Soit x la distance d'un point quelconque de l'axe OX au point O, v la température de ce point au temps t. On suppose, pour plus de généralité, que la température initiale, commune à tous les points placés à la distance x du plan $O\gamma$, est différente pour les différentes valeurs de x et est représentée par l'équation :

$$v_0 = F(x).$$

Les points placés à la même distance du plan $O\gamma$ ne cesseront pas d'avoir une température commune ; ainsi v est une fonction de x et de t seulement. Lorsqu'on suppose $t = 0$, il est nécessaire que cette fonction convienne à l'état initial qui est donné.

Considérons le mouvement de la chaleur dans une couche infiniment peu épaisse, terminée par deux plans dont les distances au plan OY sont x et $x - dx$. La

quantité de chaleur qui passe de la partie du solide extérieure dans la couche d'épaisseur dx est égale, par unité de surface, à :

$$K \frac{dv}{dx} dt,$$

K étant le coefficient de conductibilité intérieure.

La quantité de chaleur qui s'écoule par le plan situé à la distance $x - dx$ s'obtient en remplaçant x par $x - dx$ dans l'expression précédente, ce qui donne :

$$K \frac{dv}{dx} dt - K \frac{d^2 v}{dx^2} dx\, dt.$$

Si on fait la différence entre ces deux expressions, on a la quantité de chaleur qui s'accumule dans la couche d'épaisseur dx; c'est :

$$K \frac{d^2 v}{dx^2} dx\, dt.$$

Or la quantité de chaleur nécessaire pour élever de dv la température de la tranche considérée est :

$$CD\, dx\, dv,$$

où C est la chaleur spécifique et D la densité.

On a donc :

$$K \frac{d^2 v}{dx^2} dx\, dt = CD\, dx\, dv,$$

ou :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

IV. *Condition particulière à laquelle est assujettie la surface extérieure du mur* (*)

Quand un solide s'échauffe sous l'influence d'air chaud ou de vapeur, il faut concevoir, d'après Fourier, que la

(*) C'est ici le lieu d'indiquer la différence fondamentale qu'il y a entre la théorie de M. Kirsch sur la propagation de la chaleur dans les parois d'un cylindre (voir l'ouvrage de cet auteur : *Die Bewegung der Wärme in den cylinderwandungen der Dampf-*

couche extérieure de ce solide est dans un état propre à faire entrer, à chaque instant, dans le solide, une

---

maschine; et la *Revue universelle de Liège*, 3e série, t. VI, 1889) et la mienne. M. Kirsch admet que la surface intérieure d'un cylindre a, à chaque instant, la température de la vapeur qui la touche. Cette température de la vapeur, T, peut être exprimée par une fonction, $F(\alpha)$ (α étant l'angle de manivelle, proportionnel au temps), développable en une série de sinus; de sorte qu'on peut poser :

$$F(\alpha) = A_0 + A_1 \sin \alpha + A_2 \sin 2\alpha + \ldots A_n \sin n\alpha + \ldots$$

D'autre part, l'équation différentielle du mouvement de la chaleur,

$$\frac{dT}{dt} = K \frac{d^2 T}{dx^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{d\alpha} = \frac{d^2 T}{dX^2}.$$

X étant une quantité proportionnelle à la profondeur, x, du point considéré de la paroi, a pour intégrale générale :

$$T = A_0 + \sum_1^\infty C e^{-X\sqrt{p}} \cos(p\alpha - X\sqrt{p} - \delta),$$

où p est un nombre entier positif quelconque et C et δ des constantes.

En faisant dans cette intégrale $X = 0$ et en l'identifiant avec le développement de $F(\alpha)$, on trouve, sans difficulté, que l'équation générale de la température à une profondeur X est la suivante :

$$\begin{aligned} T = A_0 + A_1 e^{-X} \sin(\alpha - X) &+ A_2 e^{-X\sqrt{2}} \sin(2\alpha - X\sqrt{2}) \\ &+ A_3 e^{-X\sqrt{3}} \sin(3\alpha - X\sqrt{3}) + \ldots \\ &+ A_n e^{-X\sqrt{n}} \sin(n\alpha - X\sqrt{n}) + \ldots \end{aligned}$$

De cette dernière équation, M. Kirsch déduit le mouvement de la chaleur dans les parois d'un cylindre.

L'hypothèse qui forme la base de la théorie de M. Kirsch, à savoir : que la température de la surface intérieure d'un cylindre est égale à celle de la vapeur qui la touche, est fausse. Elle aurait comme conséquence que le coefficient de conductibilité extérieure serait infini, ce qui est contraire aux lois universellement admises de la transmission de la chaleur. La température de la surface intérieure d'un cylindre n'est pas et ne peut être égale à celle de la vapeur, de même que la température de la surface extérieure n'est pas égale à la température atmosphérique.

En définitive, M. Kirsch a admis comme une donnée une quantité qui est, en réalité, l'inconnue, et que je considère comme telle, dans mon étude.

quantité de chaleur égale à celle que la présence du milieu peut lui donner.

La quantité de chaleur qui s'écoule dans l'intérieur du solide, à la distance x, est :

$$K \frac{dv}{dx} dt.$$

Cette expression est applicable à toutes les valeurs de x. En y faisant $x = X$, on connaîtra la quantité de chaleur qui traverse la surface extérieure du mur. D'un autre côté, la température sur la surface étant T et celle de la source étant θ, la quantité de chaleur, qui peut passer par l'unité de surface, est :

$$h(\theta - T)\, dt,$$

h étant le coefficient de conductibilité extérieure.

On a donc deux expressions différentes du flux de chaleur sur la surface extérieure. En les égalant, il vient :

$$K \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=X} = h(\theta - T).$$

T est la valeur de v quand on y fait $x = X$.

Il s'ensuit que la solution du problème revient à celle des trois équations suivantes :

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{K}{CD} \dfrac{d^2 v}{dx^2}, \\ K \left(\dfrac{dv}{dx}\right)_{x=X} = h(\theta - T), \\ (v)_{t=0} = F(x). \end{cases}$$

La première de ces équations a lieu pour toutes les valeurs de x et de t; la deuxième pour $x = X$ quel que soit t; la troisième pour $t = 0$ quel que soit x.

V. *Résolution du système* (A) *dans le cas où* $\theta =$ *constante.*

Fourier, en étudiant la propagation de la chaleur dans une sphère solide, a donné la marche à suivre pour

résoudre le système d'équations (A) dans le cas où θ est une constante. Mais, si on veut appliquer la théorie de la chaleur aux machines à vapeur, le cas où la température de la source est constante ne se présente jamais en pratique. Même pendant la durée de l'admission, la température de la vapeur varie.

Elle varie dans des limites très étendues, si on considère (ce qu'il est nécessaire de faire) une révolution complète. L'objet capital de la question consiste donc à trouver la solution générale des équations (A) dans le cas où θ est une fonction quelconque du temps. En pratique, la fonction θ est connue par le diagramme des pressions fourni par l'indicateur.

Pour trouver la solution dans le cas où θ est variable, nous nous servirons de la solution dans le cas où θ est constant. Par conséquent, c'est cette dernière que nous allons établir tout d'abord.

Supposons donc θ constant et égal à θ_0. Prenons cette température constante comme zéro des températures, de sorte que v sera compté à partir de ce zéro. Par suite de cette hypothèse, le second membre de la seconde des équations (A), c'est-à-dire $h(\theta_0 - \mathrm{T})$ s'écrira simplement $-h\mathrm{T}$, T représentant la température sur la surface du solide comptée en partant de θ_0 comme origine.

Dès lors, en posant $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{DC}} = k$, les deux premières des équations (A) s'écrivent :

$$\frac{dv}{dt} = k\,\frac{d^2v}{dx^2}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\mathrm{X}} + \frac{h}{\mathrm{K}}\,\mathrm{T} = 0. \tag{2}$$

Une solution particulière de l'équation (1) est :

$$v = e^{-kn^2t}(a\cos nx + b\sin nx).$$

Dans le cas où tout est symétrique par rapport à un

plan médian, la valeur de v doit être une fonction paire de x. Par conséquent il faut effacer le terme en sinus de la solution particulière, qui se réduit à :

$$v = ae^{-kn^2t} \cos nx.$$

Dans cette expression a et n sont des constantes à déterminer.

La solution générale sera formée par une somme de solutions particulières en nombre infini, dans chacune desquelles les constantes a et n seront différentes. Donc la solution générale est de la forme

$$v = a_1 e^{-kn_1^2 t} \cos n_1 x + a_2 e^{-kn_2^2 t} \cos n_2 x + \ldots$$

Elle contient une double série infinie de constantes arbitraires.

VI. *Détermination de* n.

Les valeurs de n se déterminent facilement à l'aide de l'équation (2).

Considérons, en effet, une solution particulière :

$$v = ae^{-kn^2t} \cos nx.$$

On en déduit :

$$\frac{dv}{dx} = -ane^{-kn^2t} \sin nx.$$

En portant dans (2) les valeurs de v et de $\frac{dv}{dx}$ après y avoir fait $x = \mathrm{X}$, on a :

$$n \sin n\mathrm{X} = \frac{h}{\mathrm{K}} \cos n\mathrm{X},$$

ou bien :

$$\frac{n\mathrm{X}}{\operatorname{cotg} n\mathrm{X}} = \frac{h\mathrm{X}}{\mathrm{K}}. \tag{3}$$

En posant $n\mathrm{X} = \varepsilon$ et $\frac{h\mathrm{X}}{\mathrm{K}} = \lambda$, cette équation devient :

$$\frac{\varepsilon}{\operatorname{cotg} \varepsilon} = \lambda. \tag{3 bis}$$

Comme l'a montré Fourier, cette équation a une infinité de racines réelles et est susceptible d'une interprétation géométrique simple qui permet de trouver toutes les racines.

Soit :

$$u = \operatorname{cotg} \varepsilon,$$

l'équation d'une ligne dont l'arc ε est l'abscisse et u l'ordonnée ; et soit :

$$u = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

l'équation d'une droite dont ε et u désignent aussi les coordonnées. L'inconnue ε est l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite.

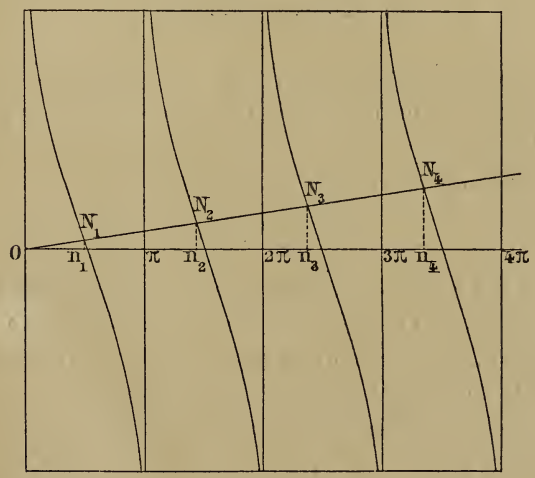


Fig. 3.

La courbe est composée d'une infinité d'arcs. Les ordonnées sont nulles pour les valeurs des abscisses :

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \text{etc.},$$

et infinies pour les valeurs :

$$0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \text{etc.}$$

La droite $u = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ est telle que $ON_1N_2N_3$. Elle coupe nécessairement toutes les branches de la courbe transcendante. A chaque point d'intersection correspond une abscisse qui est une racine de l'équation (3 bis).

Il y a donc un nombre infini de racines réelles qui, à mesure qu'elles croissent, se rapprochent indéfiniment d'un multiple de π.

Fourier s'est étendu longuement (*Théorie analytique de la chaleur*, p. 308) sur les procédés à employer pour calculer ces racines.

VII. *Détermination de* a.

On connaît maintenant l'une des constantes, n, de chacune des solutions particulières de l'équation différentielle (1).

La valeur de v donnée par l'équation :

$$v = ae^{-kn^2t} \cos nx,$$

où n est une racine quelconque de l'équation (3), satisfait aux équations (1) et (2), c'est-à-dire à deux conditions de la question. La solution générale sera formée par la somme de toutes les solutions particulières, qui sont en nombre infini comme les racines de l'équation (3). Désignons donc par n_1, n_2, n_3, etc., ces racines rangées par ordre de grandeur croissante. La solution générale sera :

$$v = a_1 e^{-kn_1^2 t} \cos n_1 x + a_2 e^{-kn_2^2 t} \cos n_2 x + \ldots$$

Si on fait $t = 0$, on aura, pour exprimer l'état initial, l'équation :

$$v_0 = a_1 \cos n_1 x + a_2 \cos n_2 x + a_3 \cos n_3 x + \ldots$$

Il s'agit de déterminer les quantités $a_1 - a_2 - a_3 \ldots$, en partant de l'équation donnée de l'état initial :

$$v_0 = \mathrm{F}(x).$$

D'après les conditions du problème posé, cet état initial est une fonction paire de x. Tout revient donc à développer $\mathrm{F}(x)$ en une série de cosinus tels que $\cos n_1 x$, $\cos n_2 x$, etc. Les coefficients du développement ne seront autres que a_1, a_2, a_3, etc.

Posons donc :

$$\mathrm{F}(x) = a_1 \cos n_1 x + a_2 \cos n_2 x + \ldots;$$

cette équation doit être une identité pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et X.

Multiplions les deux membres par $\cos mx dx$, m étant une des quantités n_1, n_2, etc., et intégrons entre les limites 0 et X.

Un terme quelconque du second membre devient :

$$a \int \cos mx \cos nx dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x + \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right].$$

Le second membre de cette équation est nul pour $x = 0$. Il est également nul pour $x = \mathrm{X}$, en vertu de l'équation (3), pourvu que m soit différent de n.

Quand $m = n$, le second membre n'est plus nul et on a alors :

$$a \int_0^{\mathrm{X}} \cos^2 nx dx = \frac{a}{2}\left(\mathrm{X} + \frac{\sin 2n\mathrm{X}}{2n}\right).$$

Par conséquent, on a :

$$\int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x) \cos nx dx = a \int_0^{\mathrm{X}} \cos^2 nx dx = \frac{a}{2}\left(\mathrm{X} + \frac{\sin 2n\mathrm{X}}{2n}\right),$$

d'où on déduit la valeur de a :

$$a = \frac{4n \int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x) \cos nx dx}{2n\mathrm{X} + \sin 2n\mathrm{X}}.$$

Les valeurs successives a_1, a_2, a_3, etc., s'obtiennent en remplaçant dans l'expression précédente n par n_1, n_2, n_3, etc.

L'intégrale générale cherchée peut donc s'écrire :

$$(4) \qquad v = \sum_{n_1}^{n_\infty} \frac{4n \int_0^X F(x) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} e^{-kn^2t} \cos nx.$$

Cette équation satisfait aux trois équations du système (A) et constitue la solution complète du problème posé, dans le cas où la température de la source de chaleur est constante.

VIII. *Résolution du système* (A) *dans le cas où* θ *est une fonction du temps. Lemme déduit du cas où la température de la source est constante.*

On a pu remarquer que ce qui fait le succès de la méthode d'intégration ci-dessus, c'est qu'on peut déterminer indépendamment les deux séries de constantes arbitraires a et n, et cela provient de ce que a disparaît quand on remplace T et $\frac{dT}{dx}$ par leurs valeurs dans l'équation de condition :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{h}{K} T = 0.$$

Si l'équation ci-dessus contenait un troisième terme indépendant de T, la méthode n'aboutirait plus parce que a ne disparaîtrait pas. Cela arrive quand la température de la source de chaleur est non plus constante, comme nous l'avions jusqu'ici supposé, mais variable avec le temps. Dans ce cas, l'équation de condition a la forme :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{h}{K} T = \frac{h}{K} \theta,$$

ou θ est une fonction quelconque du temps.

On ne peut plus déterminer séparément a et n, et la méthode de résolution directe, qui conduit à un double système d'équations en nombre infini contenant un nombre infini d'inconnues, est inabordable.

Nous allons donc employer une autre méthode, qui consiste à diviser la durée de l'échauffement en petites périodes, pendant lesquelles on peut toujours supposer que la température de la source est constante.

Nous démontrerons d'abord un lemne déduit du cas où la température de la source est toujours constante.

On sait que la loi des températures du solide, quand il est échauffé par une source constante à température θ_0, agissant pendant un temps t quelconque, est donnée par l'expression :

$$v = \theta_0 - V = \sum \frac{4n \int_0^X F(x) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx\, e^{-kn^2 t}.$$

En effet, la valeur v de l'équation (4), comptée à partir de θ_0 comme origine des températures, devient $\theta_0 - V$ quand l'origine des températures est quelconque.

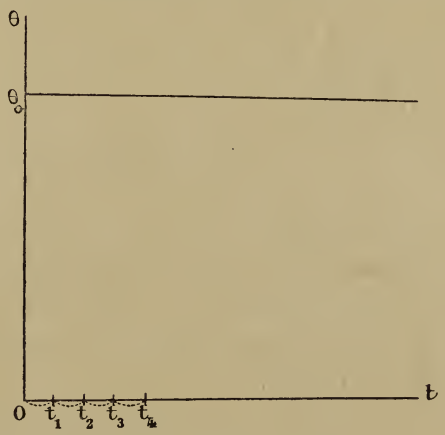


Fig. 4.

Divisons maintenant la durée d'échauffement en petites périodes égales t_1, t_2, t_3, etc.

La loi des températures dans le solide à la fin de t_1 ou au commencement de t_2 s'obtient en faisant $t = t_1$ dans la valeur de $\theta_0 - V$.

Si τ est un moment quelconque de la période t_2, compté

à partir de l'origine de t_2, la loi des températures pendant la période t_2 s'obtiendra en faisant $t = t_1 + \tau$ dans la valeur de $\theta_0 - V$.

On aura donc pendant la période t_2 :

$$\theta_0 - V = \sum \frac{4n \int_0^X F(x) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx e^{-kn^2(t+\tau)}.$$

D'autre part, traitons la période t_2 indépendamment de la période t_1. Le problème à résoudre est alors le suivant :

Établir la loi des températures dans un solide chauffé par une source de chaleur θ_0, et dont l'état initial est exprimé par l'équation :

$$\theta_0 - V_1 = \sum \frac{4n \int_0^X F(x) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx e^{-kn^2 t_1},$$

ou t_1 est une valeur fixe.

Cette loi des températures est de la forme :

$$\theta_0 - V = \sum a \cos nx e^{-kn^2\tau},$$

et il faut calculer les valeurs de a d'après l'état initial ci-dessus.

On a par suite :

$$a = \frac{4n \int_0^X (\theta_0 - V_1) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX},$$

ou en remplaçant $\theta_0 - V_1$ par sa valeur :

$$a = \frac{4n}{2nX + \sin 2nX} \int_0^X \cos nx\,dx \sum \frac{4n \int_0^X F(x) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx e^{-kn^2 t_1}.$$

La loi des températures est donc exprimée par l'équation suivante :

$$\theta_0 - V = \sum \cos nx e^{-kn^2\tau} \frac{4n}{2nX + \sin 2nX}$$
$$\times \int_0^X \cos nx\,dx \sum \frac{4n \int_0^X F(x) \cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx e^{-kn^2 t_1}.$$

Mais nous avons vu plus haut que cette loi des tempé-

ratures pouvait être aussi exprimée par l'équation :

$$\theta_0 - V = \sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx\, e^{-kn^2(t_1+\tau)}.$$

Donc les deux expressions ci-dessus de $\theta_0 - V$ sont complètement équivalentes.

Toutes deux indiquent la loi d'échauffement du solide, la seconde à partir du commencement de la période t_1 et pour toutes les périodes suivantes, la première à partir du commencement de la période t_2 et pour toutes suivantes. Toute la différence entre les deux expressions réside en ce que l'origine du temps n'est pas la même.

IX. *Division de la durée d'échauffement en petites périodes.*

Supposons maintenant que la température de la source

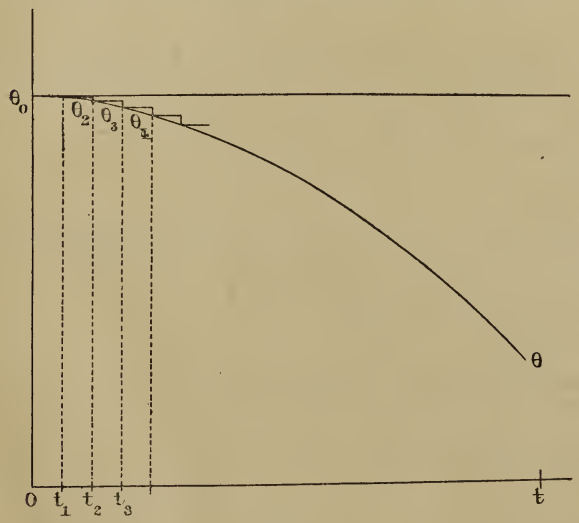


Fig. 5.

ne soit plus constante, mais obéisse à une certaine loi représentée par la courbe $\theta_0\,\theta$.

Divisons la durée d'échauffement en intervalles égaux très petits, t_1, t_2, t_3, etc.

Supposons que pendant l'intervalle t_1 la température de la source reste constante et égale à θ_0 ; que pendant l'intervalle t_2 la température de la source reste constante et égale à θ_2, valeur donnée par l'intersection de la courbe et de l'ordonnée élevée en t_1.

De même pour les autres intervalles. Nous remplaçons ainsi la courbe $\theta_0\theta$ par une série d'échelons qui se rapprochent indéfiniment de la courbe quand les intervalles de temps deviennent infiniment petits.

Pendant la période t_1, la température de la source de chaleur restant constante, nous connaissons la loi des températures dans le solide. En particulier, l'état final de cette période est donné par l'équation :

$$(5) \qquad \theta_0 - V_1 = \sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} \cos nx e^{-kn^2 t_1}.$$

Considérons maintenant la période t_2 indépendamment de la période t_1, c'est-à-dire en prenant l'origine de t_2 pour origine du temps. On aura l'état initial du solide en formant la valeur de $\theta_2 - V_1$. On a :

$$\theta_2 - V_1 = \theta_0 - V_1 - (\theta_0 - \theta_2).$$

L'état initial est donc connu au moyen de l'équation (5) et on peut former les valeurs des coefficients a qui doivent entrer dans l'expression de $\theta_2 - V$.

On a ainsi :

$$a = \frac{4n}{2nX + \sin 2nx}\int_0^X (\theta_2 - V_1)\cos nx\,dx,$$

$$a = \frac{4n}{2nX + \sin 2nX}\left[\int_0^X (\theta_0 - V_1)\cos nx\,dx - \int_0^X (\theta_0 - \theta_2)\cos nx\,dx\right],$$

$$a = \frac{4n}{2nX + \sin 2nX}\int_0^X \cos nx\,dx \sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX}\cos nx e^{-kn^2 t_1}$$
$$- \frac{4n}{2nX + \sin 2nX}\int_0^X (\theta_0 - \theta_2)\cos nx\,dx.$$

En vertu du lemne, démontré dans le paragraphe précédent, la première partie de la valeur de $\theta_2 - V$, qu'on formera à l'aide des premiers termes des valeurs de a,

est équivalente à l'expression :

$$\sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_1+\tau)}.$$

Par conséquent on a pour la valeur de $\theta_2 - V$:

$$\theta_2 - V = \sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2X+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_1+\tau)}$$
$$-\sum \frac{4(\theta_0-\theta_1)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2\tau}.$$

Dans cette expression l'origine du temps variable, τ, est l'origine de la période t_2.

Pour connaître l'état du solide à la fin de l'intervalle t_2, il suffit de faire $\tau = t_2$ dans l'expression ci-dessus. On obtient ainsi l'état initial de la période suivante t_3.

Considérons maintenant la période t_3 pendant laquelle la source est à la température θ_3.

L'état initial de cette période est la valeur de $\theta_3 - V_2$. On a :

$$\theta_3 - V_2 = \theta_2 - V_2 - (\theta_2 - \theta_3).$$

La valeur des coefficients a est donnée par les équations :

$$a = \frac{4n}{2nX+\sin 2nX}\left[\int_0^X (\theta_2 - V_2)\cos nx\,dx - \int_0^X (\theta_2-\theta_3)\cos nx\,dx\right],$$

$$a = \frac{4n}{2nX+\sin 2nX}\int_0^X \cos nx\,dx \sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX+\sin 2nX}$$
$$\times \cos nx\,e^{-kn^2(t_1-t_2)}$$
$$-\frac{4n}{2nX+\sin 2nX}\int_0^X \cos nx\,dx \sum \frac{4n\int_0^X (\theta_0-\theta_2)\cos nx\,dx}{2nX+\sin 2nX}$$
$$\times \cos nx\,e^{-kn^2 t_2}$$
$$-\frac{4n}{2nX+\sin 2nX}\int_0^X (\theta_2-\theta_3)\cos x\,dx.$$

En vertu du lemme, la première partie de la valeur de $\theta_3 - V$, qu'il faut former avec le premier terme de la

valeur de a, est équivalente à l'expression :

$$\sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_1+t_2+\tau)}.$$

La deuxième partie de la valeur de $\theta_3 - V$ peut s'écrire :

$$-\sum \frac{4(\theta_0-\theta_2)\sin nX}{2nX+\sin 2nx}\cos nx\,e^{-kn^2(t_2+\tau)}.$$

Enfin la troisième est :

$$-\sum \frac{4(\theta_2-\theta_3)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2\tau}.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\theta_3 - V = &\sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_1+t_2+\tau)}\\ &-\sum \frac{4(\theta_0-\theta_2)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_2+\tau)}\\ &-\sum \frac{4(\theta_2-\theta_3)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2\tau}.\end{aligned}$$

Dans cette expression la variable τ doit être comptée à partir de l'origine de t_3.

On voit facilement, sans qu'il soit utile d'insister, quelle est la loi de formation des valeurs de $\theta_4 - V$, $\theta_5 - V$..., $\theta_n - V$.

L'expression générale est la suivante :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\theta_n - V = &\sum \frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX+\sin 2nX}\\ &\times \cos nx\,e^{-kn^2(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}+\tau)}\\ &-\sum \frac{4(\theta_0-\theta_2)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\\ &\times \cos nx\,e^{-kn^2(t_2+t_3+\ldots+t_{n-1}+\tau)}\\ &-\sum \frac{4(\theta_2-\theta_3)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_3+\ldots+t_{n-1}+\tau)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\sum \frac{4(\theta_{n-2}-\theta_{n-1})\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2(t_{n-1}+\tau)}\\ &-\sum \frac{4(\theta_{n-1}-\theta_n)\sin nX}{2nX+\sin 2nX}\cos nx\,e^{-kn^2\tau}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation donne la loi de la propagation de la chaleur dans le solide à partir du commencement de la période t_n, pendant laquelle la température de la source reste constante et égale à θ_n.

Supposons maintenant que chacune des périodes soit infiniment petite. Alors, si la courbe des températures de la source est continue, toutes les différences $\theta_0 - \theta_2$, $\theta_2 - \theta_3$, etc., sont infiniment petites et égales à $d\theta$.

Nous allons voir ce que devient l'équation (6). Posons :

$$\frac{4n\int_0^X F(x)\cos nx\,dx}{2nX + \sin 2nX} = A,$$

$$\frac{4d\theta \sin nX}{2nX + \sin 2nX} = \alpha d\theta.$$

Nous considérerons l'expression de $\theta_{n+1} - V$ au lieu de $\theta_n - V$ de l'équation (6) et nous donnerons aux quantités $t_2, t_3 \ldots, t_n$ une signification différente de celle donnée jusqu'ici. Ces quantités représenteront le temps écoulé depuis l'origine de la période t_1 jusqu'à la fin de la période indiquée par l'indice. Ainsi t_2 désignera désormais le temps exprimé précédemment par $t_1 + t_2$ et t_n désignera le temps exprimé précédemment par $t_1 + t_2 + \ldots, + t_n$. En mettant en facteur le terme commun $\cos nx e^{-Kn^2\tau}$, la formule générale s'écrit alors :

$$\theta_{n+1} - V = \sum \left[A e^{-kn^2 t_n} - \alpha d\theta e^{-kn^2(t_n - t_1)} - \alpha d\theta e^{-kn^2(t_n - t_2)} - \ldots \right.$$
$$\left. - \alpha d\theta e^{-kn^2(t_n - t_{n-1})} - \alpha d\theta\right] \cos nx e^{-kn^2\tau'}.$$

Or les périodes en lesquelles nous avons divisé le temps t_n étant en nombre infini et chacune d'elles étant égale à $d\tau$, on a :

$$t_1 = d\tau,$$
$$t_2 = 2d\tau,$$
$$t_3 = 3d\tau,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_n = d\tau \times \infty.$$

On voit alors que la somme des termes négatifs du facteur entre parenthèses de $\theta_{n+1} - V$ n'est autre que :

$$\int_0^{t_n} \alpha d\theta e^{-kn^2(t_n-\tau)},$$

θ étant une fonction du temps, on a :

$$d\theta = \psi(\tau) d\tau.$$

Alors la formule générale s'écrit :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_{n+1} - V = \sum \Big(& A e^{-kn^2 t_n} \\ & - \int_0^{t_n} \alpha d\theta e^{-kn^2(t_n-\tau)} \Big) \cos nx e^{-kn^2\tau'}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule τ représente un temps quelconque compris entre 0 et t_n, τ' représente un temps quelconque compté à partir de t_n.

L'équation (7) donne la loi des températures dans le solide soumis à partir du temps t_n à une source de chaleur constante θ_n, ce solide ayant été soumis pendant le temps compris entre 0 et t_n à une source de chaleur à température variable représentée par la courbe $\theta_0 \theta_n$.

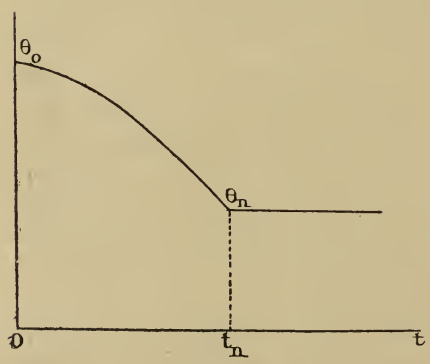


Fig. 6.

Pour avoir l'état du solide, au temps t_n, il suffit de faire $\tau' = 0$ dans l'équation (7). Par conséquent cette équation résout le problème de l'échauffement d'un solide soumis à une source de chaleur à température variable.

L'équation (7) est très compliquée. Cependant, grâce à des méthodes dont le développement dépasserait le cadre de ce mémoire, on peut calculer assez facilement

les températures d'une paroi soumise à une source de chaleur quelconque, ainsi que les quantités de chaleur transmises.

Le problème de la propagation de la chaleur dans la paroi d'un cylindre qui peut, comme nous l'avons reconnu précédemment, être assimilée au mur indéfini que nous avons jusqu'ici considéré, est donc résolu complètement dans toute sa généralité.

X. *Détermination du coefficient* h.

Pour que la théorie précédente puisse recevoir une application pratique, il faut connaître h, le coefficient de conductibilité extérieure du métal qui compose la paroi d'un cylindre, et il faut, en outre, que ce coefficient soit le même pour toutes les machines à vapeur saturée. Ce dernier point est capital. On est conduit à supposer qu'il en est ainsi si on remarque que, dans toutes les machines, on a le même fluide — de la vapeur saturée — évoluant en présence d'un même métal, fer, fonte ou acier, dont la surface est toujours dans le même état de poli.

Il ne faut pas non plus que h dépende de l'écart des températures, c'est-à-dire qu'il faut voir si cet écart est toujours assez faible pour que la loi de Newton soit vraie. Il en est bien ainsi dans les machines à vapeur. D'abord l'écart des températures entre les parois et la vapeur n'est presque jamais supérieur à 50 ou 60°. C'est encore trop pour que h soit constant; mais, d'après l'exemple que nous donnons (*fig.* 1, Pl. XIV) de la loi des températures sur la paroi, on voit que l'écart qui est à l'origine de 68° n'est plus que de 36° au bout de 1/10e de seconde; cet écart diminue donc très rapidement. L'exemple choisi, qui s'applique à une machine à condensation, est un des cas les plus défavorables qu'on puisse rencontrer en pra-

tique, puisque la différence entre les températures de la vapeur à l'admission et à l'échappement est de près de 100°, ce qui n'arrive jamais, par exemple, dans le cas d'échappement à l'air libre. Les écarts de température notables ne durent qu'un temps très court; par suite, quand même h varierait sensiblement avec ces écarts, cette variation n'aurait qu'une faible influence sur les échanges de chaleur.

Pour calculer h, nous avons appliqué la théorie aux expériences de Hirn sur la machine du Logelbach (expériences du 28 novembre 1873 et du 7 septembre 1875), et aux expériences de M. Willans sur la Central valve engine (voir la *Revue industrielle de Mulhouse* et la *Revue universelle de Liège*). Dans ces expériences, faites avec le plus grand soin, on a déterminé exactement les quantités de chaleur absorbées et restituées par les parois. Les expériences de Hirn ont été faites sur une machine à condensation, dont le cylindre a un diamètre de $0^m,605$ et une longueur de $1^m,702$; la vitesse était de 30,4 tours à la minute. Les expériences de M. Willans ont été faites sur une petite machine, à grande vitesse, sans condensation, dont le cylindre a un diamètre de $0^m,3556$ et une longueur de $0^m,1524$. La vitesse a été de 110,5 tours et de 408,4 tours à la minute. On voit que les conditions de ces expériences ont été très différentes au point de vue des dimensions du cylindre, de la vitesse, du mode d'admission de la vapeur, de l'échappement, du degré d'admission (15 et 25 p. 100 dans les expériences de Hirn, 43,7 p. 100 dans celles de M. Willans).

D'après le nombre de calories cédées aux parois pendant l'admission, nous avons calculé h et trouvé que ce coefficient, c'est-à-dire le nombre de calories qui traverse 1 mètre carré de surface d'une paroi intérieure de cylindre, pour une différence de température de 1° et pendant une seconde, est de :

$6^{\text{calories}},6$ pour la machine de Hirn,
6,9 et 7 calories pour la machine de M. Willans.

Le coefficient de conductibilité intérieure du fer, rapporté aux mêmes unités, c'est-à-dire le nombre de calories qui traverse une lame ayant 1 mètre carré de surface, $0^{m},001$ d'épaisseur, pour une différence de 1°, en une seconde, est de 16,5 calories. En rapprochant les deux coefficients, on voit que le coefficient de conductibilité extérieure n'a rien d'excessif. Des expériences exécutées dans des conditions très différentes donnant le même résultat, on peut en conclure que le coefficient h est constant, non seulement pour la même machine, mais pour toutes les machines à vapeur saturée.

Pour les machines à vapeur surchauffée, ce coefficient est moins élevé, tant que la vapeur reste surchauffée. Ce qui augmente sa valeur, c'est la présence d'une certaine proportion d'eau dans la vapeur et d'un peu de rosée sur les parois. D'ailleurs la plus ou moins grande quantité de cette rosée ne paraît pas avoir d'influence sur le coefficient, car dans les deux expériences de Willans à 110 tours et à 408 tours, on a trouvé le même coefficient, bien qu'il y eut $6^{gr},3$ de vapeur condensée dans la première, et seulement $2^{gr},8$ dans la seconde, pour la même étendue de parois condensantes, puisque le degré d'admission était le même.

On peut aussi conclure, de ce qui précède, que les effets thermiques qui se produisent dans les cylindres sont dus uniquement à l'action des parois. Sinon la constance du coefficient de conductibilité extérieure serait invraisemblable.

D'après les résultats indiqués ci-dessus, on peut attribuer à ce coefficient la valeur de 6,8 calories.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES DIAGRAMMES DES PRESSIONS.

XI. *Observations générales.*

La théorie mathématique des échanges de chaleur entre la vapeur et les parois permet de calculer rigoureusement ces échanges, pourvu que l'on connaisse le diagramme des températures de la vapeur. Ce diagramme se déduit facilement du diagramme des pressions obtenu à l'aide de l'indicateur. Or, pour prendre avec l'indicateur des diagrammes, il faut faire une série d'observations qui ne sont ni toujours faciles, ni rigoureusement exactes. Il y a donc lieu de rechercher si on ne pourrait pas construire théoriquement des diagrammes approchés tout aussi exacts que ceux de l'indicateur.

Il faut d'abord remarquer que certaines erreurs, même notables, commises sur les diagrammes, n'ont qu'une faible influence sur le calcul des échanges de chaleur. Considérons, en effet, la *fig.* 7 et la *fig.* 1 de la Pl. XIV ou les axes OX, OY représentent les temps et les températures.

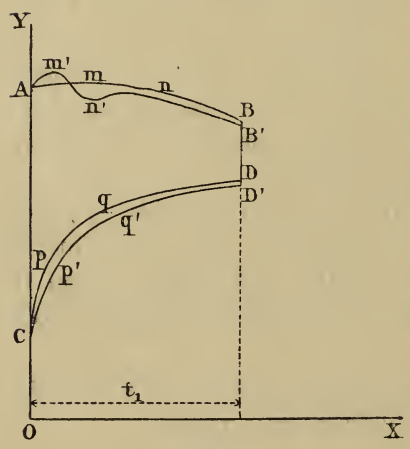


Fig. 7.

La ligne A*mn*B est le diagramme des températures de la vapeur et C*pq*D est celui des températures à la surface des parois couvercle. La quantité de chaleur cédée

à ces dernières pendant l'admission est mesurée par la surface A*mn*BC*pq*D qui représente, t_1 étant la durée de l'admission :

$$\int_0^{t_1} (\theta - T)\,dt.$$

Supposons maintenant que la partie AB du diagramme ne soit pas exacte et qu'en réalité, elle doive être remplacée par la ligne A*m'n'*B'. La courbe des températures sur les parois est alors C*p'q'*D' et la chaleur échangée est mesurée par l'aire A*m'n'*B'C*p'q'*D'. On voit que cette aire ne peut différer que très peu de la première et qu'on ne commet qu'une faible erreur en prenant l'une pour l'autre. Ce fait s'explique aisément si on remarque que, pour qu'une modification du diagramme des températures de la vapeur ait une influence sensible sur les échanges de chaleur, il faut que cette modification ait une durée relative assez grande, les échanges de chaleur étant fonction du temps. La méthode par laquelle on obtient ces échanges de chaleur comporte donc une précision très satisfaisante, même si les diagrammes des températures de la vapeur ne sont qu'approchés.

Nous allons voir du reste qu'on peut tracer ces diagrammes avec une très grande exactitude.

XII. *Période d'admission.*

Nous supposerons connue la pression de la vapeur dans la boîte du tiroir. Cette pression est égale, à 1/2 kilogramme près, à celle de la chaudière quand la valve du régulateur est ouverte en grand. Dans tous les cylindres, où il y a une avance à l'admission suffisante, on peut admettre que la pression dans l'espace libre est, au début de la course du piston, égale à la pression dans la boîte du tiroir. Pendant l'admission, la pression de la vapeur dans le cylindre ne dépend que de la vitesse de la

vapeur aux lumières, laquelle dépend elle-même de la section des lumières, de la vitesse, de l'espace engendré par le piston et de la quantité de vapeur qui se condense sur les parois. Si on peut établir une relation entre ces divers éléments, on saura trouver, à chaque instant, la pression de la vapeur pendant l'admission.

Zeuner a donné la formule de l'écoulement adiabatique de la vapeur, d'un récipient à la pression p_1 dans un autre récipient à la pression p_2.

Soient :

t_1, $T_1 = 273 + t_1$, r_1, x_1, la température, la chaleur de vaporisation et la proportion de vapeur sèche de la vapeur contenue dans le premier récipient;

t_2 la température de la vapeur dans le second récipient;

w la vitesse de la vapeur.

La formule de Zeuner est :

$$w = 91{,}2\sqrt{r_1 x_1 \frac{t_1 - t_2}{T_1}}. \tag{1}$$

Nous pouvons appliquer cette formule à l'écoulement de la vapeur de la boîte du tiroir dans le cylindre, car cet écoulement ayant lieu avec des vitesses de plusieurs centaines de mètres à la seconde, comme le calcul l'indique, peut être supposé adiabatique.

Dans la formule (1), les quantités w et t_2 sont inconnues.

La proportion de vapeur sèche x_1 est aussi inconnue. Mais il résulte de nombreuses expériences, de celles de Hirn notamment, que, quand la prise de vapeur est bien disposée, le degré d'humidité de la vapeur est faible et varie de 2 à 5 p. 100. Nous admettrons donc $x_1 = 0{,}98$. Du reste, une légère variation de x_1 ne modifie les résultats obtenus pour la vitesse W que d'une façon inappréciable.

Considérons le piston à un moment quelconque τ de sa

course pendant la période d'admission. A ce moment, le volume occupé par la vapeur est v et la densité, d'ailleurs inconnue, de la vapeur est γ; de sorte que la masse de vapeur contenue dans le cylindre est $v\gamma$. Supposons que le piston se déplace d'une quantité infiniment petite pendant le temps $d\tau$; le volume devient $v + dv$ et la densité diminuée de $d\gamma$ n'est plus que $\gamma - d\gamma$. Par suite, la masse de vapeur contenue dans le cylindre, au bout du temps $\tau + d\tau$, est :

$$(v + dv)(\gamma - d\gamma).$$

Cette masse de vapeur est égale à celle qui se trouvait dans le cylindre, à la fin du temps τ, augmentée de la quantité de vapeur qui est entrée pendant le temps $d\tau$ et diminuée de la quantité de vapeur condensée par suite de l'action des parois pendant ce même temps.

Si w et ω sont la vitesse de la vapeur et la section de la lumière d'admission au temps τ,

t_1 et γ_1, la température et la densité de la vapeur dans la boîte du tiroir,

la quantité de vapeur iutroduite pendant le temps $d\tau$, est :

$$\gamma w \omega d\tau,$$

et on a :

$$w = 91{,}2\sqrt{0{,}98 r_1 \frac{t_1 - t}{T_1}}.$$

Soit, d'autre part, $d\varepsilon$ la quantité de vapeur condensée pendant le temps $d\tau$.

On a alors la relation :

$$(v + dv)(\gamma - d\gamma) = v\gamma + \gamma\omega w d\tau - d\varepsilon,$$

ou :

$$\gamma dv = v d\gamma + \gamma\omega w d\tau - d\varepsilon. \tag{2}$$

Dans cette équation différentielle, v et ω sont des fonctions du temps; w et ε sont des fonctions du temps et

de l'état de la vapeur, c'est-à-dire de γ. Donc finalement, cette différentielle constitue la relation fondamentale qui existe entre l'état de la vapeur et le temps.

Si l'équation (2) pouvait être résolue, on aurait la solution exacte du problème. Mais elle n'est pas intégrable et, par suite, on ne peut trouver que des solutions approximatives qui permettront, du reste, comme nous allons le voir, de déterminer γ avec telle approximation qu'on voudra.

On aura une première solution approximative en faisant, dans l'équation (2), l'hypothèse que $d\gamma = 0$, que $d\varepsilon = 0$ et en remplaçant dans le terme $\gamma \omega w d\tau$ le facteur γ par sa valeur approchée γ_1, densité de la vapeur dans la boîte du tiroir.

Cette équation devient alors :

$$\gamma dv = \gamma_1 \omega w d\tau. \tag{3}$$

Exprimons dv et $d\tau$ en fonction d'une même variable, l'angle de manivelle α.

Si on appelle

v_e le volume de l'espace libre,
Ω la section du cylindre,
C la course du piston,

on a :

$$v = v_e + \frac{\Omega C}{2}(1 - \cos\alpha);$$

d'où :

$$dv = \frac{\Omega C}{2} \sin\alpha d\alpha.$$

En appelant n, le nombre de tours par seconde, on a pour le temps τ compté en secondes :

$$\tau = \frac{\alpha}{2\pi n},$$

d'où :

$$d\tau = \frac{d\alpha}{2\pi n}.$$

Nous portons dans (3) les valeurs de dv et de $d\tau$, en remplaçant également w par sa valeur.

Il vient alors :

$$\gamma \frac{\Omega C}{2} \sin\alpha d\alpha = \gamma_1 \omega 91{,}2 \sqrt{r_1 x_1 \frac{t_1 - t}{T_1}} \frac{d\alpha}{2\pi n}.$$

En élevant au carré et en posant :

$$K^2 = \frac{T_1}{\overline{91{,}2}^2 r_1 x_1},$$

cette équation devient :

$$(4) \qquad \gamma^2 = \left(\frac{\gamma_1}{\pi n K \Omega C} \frac{\omega}{\sin\alpha}\right)^2 (t_1 - t).$$

Elle donne une relation entre la densité γ de la vapeur et sa température t. Il y a une autre relation entre ces quantités, qui est fournie par la thermodynamique. Il est donc possible de trouver γ et t.

On peut le faire par des constructions géométriques simples, en remarquant que l'équation (4) représente une parabole dont le paramètre est :

$$2p = \left(\frac{\gamma_1}{\pi n K \Omega C} \frac{\omega}{\sin\alpha}\right)^2.$$

Si on calcule pour une valeur donnée de α le terme variable $\frac{\omega}{\sin\alpha}$ de ce paramètre, on obtiendra facilement la valeur $2p$ et on pourra construire la parabole correspondante.

Prenons deux axes rectangulaires :

OO_1 axe des températures,
$O\gamma$ axe des densités.

Portons :

$$OO_1 = t_1.$$

Si on prend O comme origine des abscisses, un point P

de OO_1 représentera la température t; et si on prend O_1 comme origine, le même point P représentera $t_1 - t$. Dès lors la parabole exprimée par l'équation (4) a son sommet en O_1 et est telle que $O_1 mn$.

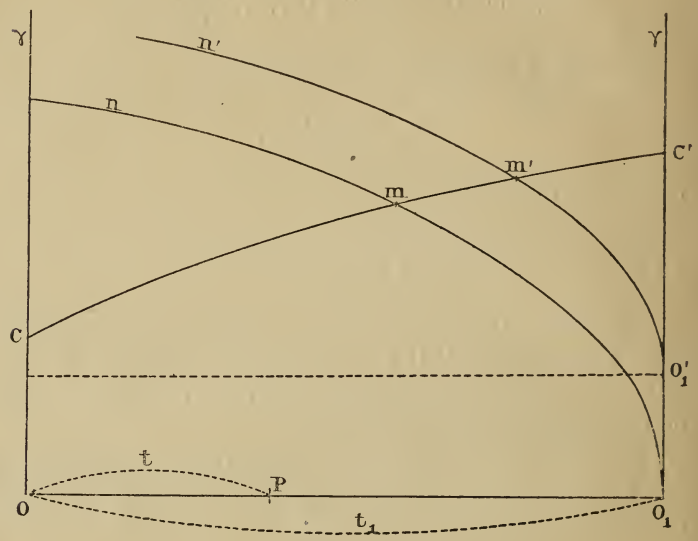


Fig. 8.

D'autre part, construisons, d'après les tables données dans les traités de thermodynamique la courbe $Cmm'C'$, donnant la valeur de γ pour chaque valeur de t.

Le point d'intersection m de la courbe CC' et de la parabole, donne la valeur cherchée de γ.

En construisant une série de paraboles, pour diverses valeurs de α, on obtient pour chacune d'elles une valeur de γ.

Avec ces valeurs de γ et en prenant pour abscisses les longueurs parcourues par le piston, proportionnelles aux volumes engendrés, on peut construire une courbe, AB. Cette courbe est telle qu'au point A, fin de l'admission, l'ordonnée est nulle, puisque dans l'équation (4), $\omega = 0$.

La surface comprise entre cette courbe AB, les axes et une ordonnée quelconque MP, est proportionnelle à la quantité de vapeur admises pendant que le piston parcourt le chemin OP.

Par conséquent, la quantité de vapeur présente dans le cylindre, quand le piston est en P se compose de la vapeur admise, calculée en prenant l'aire OBMP, et de la vapeur qui remplissait l'espace libre au commencement de la course. En divisant la masse de vapeur ainsi déterminée par le volume du cylindre pour la position P du piston, on obtient la densité réelle de la vapeur pour l'instant considéré. On obtient ainsi une série de valeurs de la densité, qui permettent de construire par points la courbe BA'.

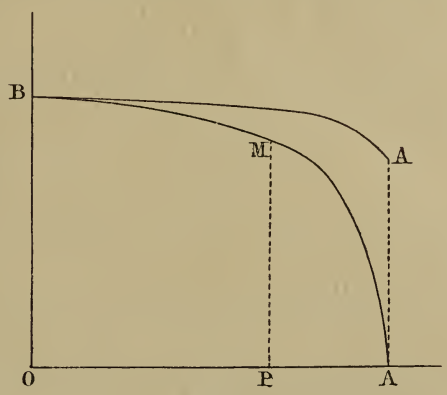


Fig. 9.

Cette courbe constitue, en première approximation, le diagramme des densités de la vapeur pendant l'admission, duquel on peut déduire, à l'aide des tables de la thermodynamique, le diagramme des pressions et celui des températures.

Au lieu de prendre comme abscisses les longueurs parcourues par le piston, on peut prendre les angles α de la manivelle, c'est-à-dire, des quantités proportionnelles au temps, et construire avec les abscisses α la courbe approchée des densités de la vapeur. La tangente en un point quelconque de cette courbe donne la valeur de $\frac{d\gamma}{d\alpha}$.

De même, en construisant d'après la courbe approchée des densités, la courbe approchée des températures, on peut calculer les échanges de chaleur entre la vapeur et les parois et en déduire les quantités de vapeur condensée, que nous avons désignées plus haut par ε. Par conséquent on connaîtra $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$.

En portant les valeurs ainsi trouvées dans l'équation différentielle (2), elle devient :

$$\gamma dv = v\frac{d\gamma}{d\alpha}d\alpha + \gamma_1 \omega w d\tau - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}d\alpha,$$

ou en remplaçant dv et $d\tau$ par leurs valeurs en fonction de α :

$$\gamma\frac{\Omega C}{2}\sin\alpha d\alpha = v\frac{d\gamma}{d\alpha}d\alpha + \gamma_1\omega w\frac{d\alpha}{2\pi n} - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}d\alpha.$$

En faisant passer dans le premier membre le premier et le troisième terme du second membre, on voit que cette équation est de la forme :

$$(\gamma - A)^2 = 2P(t_1 - t).$$

Elle représente, pour chaque valeur de l'angle α, une certaine parabole qui a son sommet sur l'axe $O_1\gamma$ de la *fig.* 8, à une distance de O_1 égale à A, et dont l'axe est parallèle à OO_1. Cette parabole est telle que $O'_1 m' n'$. A chaque valeur de α correspond une parabole analogue, et les points d'intersection de ces paraboles avec la courbe CC′ donnent une série de valeurs des densités, γ, qui permettent, comme nous l'avons vu précédemment, de construire le diagramme des densités de la vapeur. Ce nouveau diagramme constitue une deuxième approximation.

On voit qu'en procédant à une série de constructions géométriques, on peut déterminer théoriquement avec telle approximation qu'on veut le diagramme des densités et en déduire celui des pressions de la vapeur.

On remarquera qu'en général la première approximation, qu'on obtient rapidement. pourra être considérée comme suffisante. En effet, les erreurs qu'on commettra seront faibles, parce que, d'une part l'influence du terme $vd\gamma$ de l'équation (2) ne se fait sentir que vers la fin de l'admission, quand le laminage de la vapeur commence aux lumières par suite de la diminution de leur section, et que, d'autre part, la valeur de la quantité de vapeur condensée ε ne s'accroît que très peu vers la fin de l'admission.

XIII. *Période de détente.*

Pour la détente, le moyen le plus simple et le plus rapide consiste à prendre la courbe des pressions donnée par la loi de Mariotte, $pv =$ constante.

On pourrait aussi adopter la loi de la détente adiabatique de Zeuner, $pv^{\mu} =$ constante. Mais il faut remarquer que la loi de Mariotte est plus rapprochée de la réalité que celle de Zeuner, surtout vers la fin de la détente. En effet, au début et pendant une partie de la détente, en général assez courte, la vapeur cède de la chaleur aux parois, comme pendant l'admission. Par conséquent pendant cette première partie, la courbe vraie des pressions se trouve au-dessous de la courbe de Zeuner. Mais pendant le reste de la détente, les parois restituent de la chaleur à la vapeur, ce qui a pour effet de relever la courbe vraie des pressions au-dessus de la courbe de Zeuner. Par suite, la courbe de Mariotte constitue la représentation la plus exacte en même temps que la plus simple du phénomène.

Il serait d'ailleurs possible d'obtenir une approximation plus grande.

L'étude de la période d'admission fait connaître l'état de la vapeur à la fin de l'admission et, en admettant,

comme loi approximative de la détente, la courbe de Mariotte, on peut trouver, avec une approximation suffisante, les quantités Q de chaleur échangées avec les parois et construire la courbe des échanges, en prenant comme abscisses les angles de manivelle. On déduit alors de cette courbe, les valeurs de $\frac{dQ}{d\alpha}$.

La loi exacte de la détente d'une vapeur humide est l'équation différentielle :

$$dQ = \left[K + \frac{T}{E}\frac{d^2p}{dt^2}(v - \sigma)\right]dt + \frac{r}{u}\,dv,$$

où

K est la chaleur spécifique de l'eau;
t, $T = 273 + t$, p, la température et la pression de la vapeur;
v le volume de 1 kilogramme du mélange d'eau et de vapeur à t degrés;
σ le volume de 1 kilogramme d'eau à t degrés;
u l'augmentation de volume qu'éprouve 1 kilogramme d'eau en se vaporisant à t degrés;
r la chaleur de vaporisation de 1 kilogramme d'eau à t degrés;
E l'équivalent mécanique de la chaleur.

Cette équation différentielle n'est pas intégrable, mais elle permet de trouver t par approximations successives.

En effet, on supposera d'abord que la vapeur obéit à la loi de Mariotte, ce qui donne une relation entre t et α. On écrit alors la différentielle comme il suit :

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \left[K + \frac{T}{E}\frac{d^2p}{dt^2}(v - \sigma)\right]\frac{dt}{d\alpha} + \frac{r}{u}\frac{dv}{d\alpha}.$$

On considère tous les termes de cette équation comme connus, sauf $\frac{dt}{d\alpha}$. On résout alors par rapport à $\frac{dt}{d\alpha}$ et on obtient ainsi, en deuxième approximation, la valeur de t en fonction de α.

On peut finalement, par ce procédé, déterminer le

diagramme des températures, pendant la détente, avec telle approximation qu'on voudra.

XIV. *Période d'échappement.*

Pendant la période d'échappement, la pression de la vapeur dans le cylindre dépend de l'espace engendré par le piston, de la quantité de vapeur qui s'écoule par les lumières, c'est-à-dire de la vitesse de la vapeur aux lumières et de la quantité de vapeur qui résulte des revaporisations produites par la chaleur restituée par les parois.

Dans la plupart des machines, il y a de l'avance à l'échappement, et la partie du diagramme des pressions qu'il y a le plus d'intérêt à calculer est celle qui correspond à l'avance à l'échappement. Pendant cette période, le volume occupé par la vapeur augmente, tandis qu'il diminue pendant l'échappement proprement dit.

Supposons que l'avance à l'échappement commence pour un angle, α_1, de la manivelle, et voyons ce qui s'est passé lorsque la manivelle est à l'angle $\alpha > \alpha_1$.

Si la loi des pressions dans le cylindre et dans le tuyau ou réservoir d'échappement était connue, on pourrait calculer à chaque instant la vitesse de la vapeur aux lumières et, par suite, la quantité totale de la vapeur écoulée serait :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha} \gamma' \omega w \frac{d\alpha}{2\pi n}.$$

D'autre part, en supposant connue la loi des températures de la vapeur, on pourrait calculer la chaleur cédée par les parois et en déduire la quantité ε de vapeur produite.

Ce serait :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} d\alpha.$$

Alors la quantité de vapeur présente dans le cylindre pour l'angle α serait égale à la quantité de vapeur présente à la fin de la détente, diminuée de la quantité écoulée et augmentée de la quantité revaporisée. Donc, en appelant v_1 et γ_1 le volume et la densité de la vapeur à la fin de la détente, on aurait :

$$v\gamma = v_1\gamma_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha} \gamma' \omega w \frac{d\alpha}{2\pi n} + \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} d\alpha.$$

Si le deuxième membre de cette équation était connu, on pourrait obtenir l'inconnue, γ, du premier membre.

Pour résoudre cette équation par approximations successives, il faudrait connaître une loi approchée des pressions de la vapeur, pendant l'avance à l'échappement, dans le cylindre et dans le réservoir d'échappement. Or, aucune loi suffisamment approximative n'étant connue, cette méthode ne pourrait donner que des résultats incertains par des procédés peu rapides.

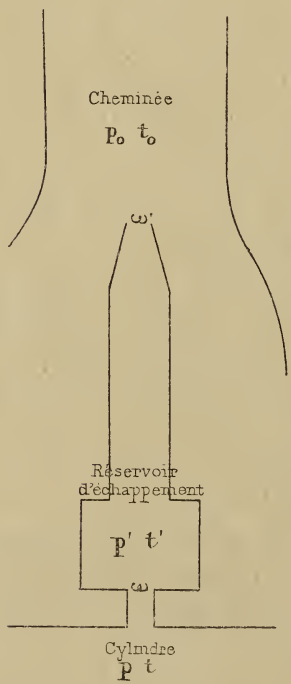


Fig. 10.

Il vaut mieux ne faire aucune hypothèse préalable et calculer successivement les pressions de la vapeur en divisant l'angle décrit par la manivelle en fractions suffisamment petites, de 3 ou 4 degrés par exemple. Alors en partant de l'état initial connu, la fin de la détente, on pourra calculer tous les éléments du problème.

Nous supposerons qu'il s'agit d'une machine sans con-

densation et nous admettrons d'abord, pour simplifier, qu'on peut négliger la quantité de vapeur produite par la revaporisation.

La pression et la température dans le cylindre sont p et t, dans le réservoir d'échappement p' et t'. Dans la cheminée la pression, p_0, est supposée égale à la pression atmosphérique.

Les vitesses de la vapeur à la lumière d'échappement et à la section d'échappement sont données par la formule de Zeuner. Ce sont :

$$w = 91{,}2\sqrt{rx\,\frac{t-t'}{T}},$$

$$w' = 91{,}2\sqrt{r'x'\,\frac{t'-t_0}{T'}}.$$

Par suite, la masse de vapeur qui s'écoule par la lumière d'échappement est, pendant le temps $\delta\tau$:

$$m = \gamma'\omega w\delta\tau;$$

et celle qui s'écoule par la section de l'échappement est :

$$m' = \gamma\omega' w'\delta\tau.$$

La différence $m - m'$ donne la quantité de vapeur qui est venue s'ajouter à celle qui se trouvait déjà dans le réservoir d'échappement. Elle permet donc de calculer l'accroissement de la pression dans ledit réservoir pendant le temps $\delta\tau$.

De même, connaissant la masse de vapeur qui est sortie du cylindre, on peut en déduire celle qui reste et, en la divisant par le volume, on aura la pression, la température et la densité de la vapeur au début de l'instant suivant.

Dans le premier instant qui suit la fin de la détente, la pression de la vapeur dans le cylindre est celle de la fin de la détente; dans le réservoir d'échappement, elle peut être supposée égale à la pression atmosphérique.

On a donc tous les éléments nécessaires pour calculer ce qui se passe pendant ce premier instant. Puis on passera au suivant de la façon exposée ci-dessus et ainsi de suite de proche en proche.

Cette méthode nécessite des calculs un peu longs, mais elle permet de calculer avec beaucoup d'exactitude la loi des pressions dans le cylindre et, en même temps, dans le réservoir d'échappement, ce qui fait connaître la contre-pression et permet aussi de trouver la dépression dans la boîte à fumée.

Ces calculs peuvent être poursuivis pendant l'échappement proprement dit, c'est-à-dire pendant la course rétrograde du piston. Mais, dans les machines à deux cylindres, dans les locomotives, par exemple, ils sont inutiles. En effet, quand, pendant la course rétrograde dans le premier cylindre, la manivelle se rapproche de la position à 90 degrés, l'avance à l'échappement commence dans le second cylindre et produit dans le tuyau d'échappement une contre-pression que nous savons calculer et qui se répercute sur le premier cylindre. Dans celui-ci, la courbe des pressions qui s'était rapprochée de la ligne atmosphérique au début de la course rétrograde, se relève bientôt pour atteindre et dépasser légèrement la courbe de la contre-pression dans le tuyau d'échappement. On connaît donc exactement la courbe des pressions pendant la plus grande partie de la course rétrograde. Il est nécessaire, toutefois, de calculer la dernière partie de cette courbe, à la fin de l'échappement, car elle se relève à ce moment, parce que la compression commence à avoir de l'effet, dès que commence à se produire le laminage de la vapeur à la lumière d'échappement.

Les divers effets qui résultent du laminage de la vapeur, tant à l'admission qu'à l'échappement, sont dus à ce que les orifices d'admission et d'échappement ne s'ouvrent ni ne se ferment assez rapidement. Cet inconvé-

nient est surtout sensible avec les distributions par coulisses pour les longues détentes.

XV. *Période de compression.*

La courbe des pressions, pendant la compression, s'établit de la même façon que pendant la détente. Comme, pour la détente, la courbe de Mariotte est plus rapprochée de la réalité que la courbe de Zeuner, parce que, pendant une grande partie de la période de compression, la vapeur cède de la chaleur aux parois.

XVI. *Conclusions.*

On voit, en résumé, qu'on peut construire théoriquement des diagrammes des pressions de la vapeur dans les cylindres d'une machine, aussi approchés qu'on le veut de la réalité. Pour cela, il suffit qu'on connaisse les phases de la distribution et les ouvertures des lumières produites à chaque instant par les organes de la distribution, tiroirs ou soupapes. On trouve les déplacements des organes de la distribution soit par la méthode purement graphique dite des gabarits, due à MM. Coste et Maniquet, soit en construisant des modèles en bois de la distribution. Quand on connaît la distribution et les dimensions principales d'une machine, qu'elle existe ou non, on peut construire théoriquement les diagrammes vrais des pressions pour une allure quelconque et les diagrammes des échanges de chaleur avec les parois. De ces diagrammes se déduisent, d'une part, le travail produit, d'autre part, la dépense de vapeur. On détermine ainsi exactement le rendement réel. Cette détermination permet de reconnaître l'influence des éléments donnés de la machine, d'apprécier les avantages ou les inconvénients de la distribution et d'assigner aux divers organes les dimensions qui permettent d'obtenir le maxi-

mum d'utilisation. Enfin, la théorie exposée permet aussi d'étudier, d'une façon précise, la question assez controversée des machines Compound et de voir dans quelles conditions et pour quelles causes les machines polycylindriques peuvent être supérieures aux machines monocylindriques. Nous reviendrons ultérieurement sur ce sujet.

CHAPITRE III

APPLICATION AUX LOCOMOTIVES.

XVII. *Locomotives d'express de la compagnie d'Orléans, à cylindres extérieurs et à distribution par coulisse, système Gooch.*

La théorie va être maintenant appliquée aux locomotives d'express de la compagnie d'Orléans (série 265 à 390). Nous allons déterminer la consommation de vapeur et la force développée pour différents crans de marche et pour différentes vitesses.

L'étude qui va suivre ne s'applique naturellement qu'à une machine parfaitement bien réglée, conformément aux données et en bon état. Lorsque, par suite du service prolongé d'une machine, le jeu des mécanismes est devenu exagéré, que les bandages des roues motrices se sont usés inégalement, etc., la consommation réelle doit être évidemment supérieure à celle trouvée théoriquement pour une machine en parfait état.

Les dimensions principales des locomotives d'express de la compagnie d'Orléans sont les suivantes :

	mètre
Course des pistons	0,65
Diamètre des cylindres	0,44
Hauteur des lumières	0,34
Largeur des lumières	0,035
Recouvrement extérieur total	0,052

	mètre
Recouvrement intérieur total	0,001
Rayon d'excentricité	0,055
Sinus de l'angle d'avance des excentriques. . .	0,027

Nous avons pris les phases de la distribution dans le relevé établi par la compagnie. Elles sont les suivantes pour les admissions de 20, 30 et 40 p. 100.

Marche en avant.

Durée de l'admission.	$\frac{20-20}{100}$	$\frac{30-29}{100}$	$\frac{40-39}{100}$
Avancement linéaire, en millimètres . .	5 3/4	5 3/4	5 3/4
Ouverture maximum.	7 — 7	9 — 8 3/4	11 1/2 — 10 3/4
Commencement de la compression . . .	$\frac{34-38}{100}$	$\frac{28-31}{100}$	$\frac{22-25}{100}$
Id. de l'échappement. . . .	$\frac{37-33}{100}$	$\frac{30-27}{100}$	$\frac{24-21}{100}$
Course, en millimètres.	66	69 3/4	74 1/4

D'après ces données et d'après la théorie précédemment exposée, nous avons construit les diagrammes théoriques des pressions dans le cylindre, en supposant que la valve du régulateur d'admission est ouverte complètement et que, par suite, la pression dans la boîte du tiroir n'est inférieure que d'un demi kilogramme au plus au timbre de la chaudière, qui est de 10 kilogrammes.

La *fig.* 2 de la Pl. XIV donne l'exemple d'un diagramme construit théoriquement. Il s'applique à une admission de 20 p. 100 pour la vitesse de 4 tours par seconde. On voit que la pression, qui est supposée égale à $9^{kg},26$ au début de la course du piston, n'est plus, à la fin de l'admission, que $7^{kg},6$. Ce diagramme théorique ressemble tout à fait aux diagrammes pris à l'indicateur.

Les diagrammes des températures se déduisent de ceux des pressions à l'aide des tables de la vapeur d'eau saturée. Ils permettent de calculer les quantités de chaleur échangées entre la vapeur et les parois pendant une

révolution, d'où on déduit les quantités de vapeur condensées ou revaporisées.

Pour obtenir ensuite la dépense de vapeur sèche, il suffit d'ajouter la quantité de vapeur condensée pendant l'admission à la différence entre les quantités de vapeur sèche présentes dans le cylindre à la fin et au commencement de l'admission.

Ce calcul est le suivant, pour le diagramme correspondant à l'admission de 20 p. 100 et à la vitesse de 4 tours par seconde :

	kilogr.
Vapeur sèche présente à la fin de l'échappement . .	0,0362
Id. condensée pendant la compression	0,0066
Id. sèche au commencement de l'admission. . .	0,0296
Id. sèche à la fin de l'admission.	0,1036
Différence entre les quantités ci-dessus.	0,074
Quantités de vapeur condensée. . . . . pendant l'avance à l'admission.	0,006352
Id. l'admission	0,015554
Dépense totale de vapeur sèche (obtenue en ajoutant les trois nombres ci-dessus).	0,095906
Proportion entre la vapeur condensée et le total de vapeur sèche admise.	21,9 p. 100

Dans les tableaux suivants, nous avons résumé les résultats principaux fournis par l'étude des diagrammes correspondant à des admissions de 20, 30 et 40 p. 100 et à des vitesses de 2, 3 et 4 tours par seconde, c'est-à-dire de 45, 68 et 90 kilomètres à l'heure.

I. — Chaleur cédée aux parois pendant l'admission.

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	calories	calories	calories
2	19,5248	23,042	23,2216
3	13,7859	14,3997	15,0388
4	10,579	10,5705	9,8868

II. — **Quantités de vapeur condensées pendant l'admission.**

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	kilogr.	kilogr.	kilogr.
2	0,040502	0,04774	0,0481
3	0,028589	0,02982	0,0311
4	0,0219	0,02189	0,020559

Nous avons déjà expliqué comment on calcule la dépense de vapeur sèche. Mais, dans la réalité, la vapeur dépensée par les machines locomotives contient une proportion d'eau assez élevée. M. l'ingénieur en chef des mines Ledoux (*Méthode de calcul des charges remorquées par une locomotive*, *Revue générale des Chemins de fer*, septembre 1881), donne comme proportion d'humidité, par rapport au poids de vapeur sensible, le chiffre de 12 p. 100. Nous admettrons ce chiffre pour calculer le poids total de vapeur humide dépensée. On obtient ainsi les résultats contenus dans le tableau suivant :

III. — **Dépense de vapeur humide par coup de piston.**

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	kilogr.	kilogr.	kilogr.
2	0,154819	0,21486	0,26978
3	0,126267	0,17679	0,2352
4	0,107	0,154436	0,20648

IV. — **Proportion de vapeur condensée par rapport à la vapeur sèche admise.**

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	p. 100	p. 100	p. 100
2	27,9	23,7	19,0
3	24,1	18,0	14,1
4	21,7	15,1	10,5

V. — Dépense totale de vapeur humide, en kilogrammes, par heure.

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	kilogr.	kilogr.	kilogr.
2	4.458,78	6.187,9	7.769,6
3	5.454,7	7.637,3	10.160,6
4	6.163,2	8.895,49	11.893,24

VI. — Travail développé par la machine, en chevaux-vapeur.

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	chevaux	chevaux	chevaux
2	344,00	468,44	539,05
3	442,56	614,93	732,7
4	511,68	718,73	847,3

VII. — Consommation d'eau par cheval-heure, en kilogrammes.

VITESSE en tours par seconde	ADMISSION		
	de 20 p. 100	de 30 p. 100	de 40 p. 100
	kilogr.	kilogr.	kilogr.
2	12,96	13,22	14,41
3	12,34	12,42	13,88
4	12,06	12,39	14,04

Il résulte des chiffres du dernier tableau que, dans les conditions de marche où nous nous sommes placés et qui sont habituelles dans la pratique, sauf la marche à 90 kilomètres à l'heure avec admission de 40 p. 100, la consommation par cheval-heure ne varie pas beaucoup. Elle diminue avec la vitesse, mais dans une faible mesure. Cela tient aux inconvénients que présente le laminage de la vapeur. De sorte que les avantages thermiques de

la marche à grande vitesse sont à peu près annihilés par la mauvaise influence de la distribution.

Bien que les effets thermiques dus aux parois soient moindres avec les longues admissions qu'avec les courtes, la consommation augmente quand l'admission augmente à cause de la perte due à une trop courte détente et aux contre-pressions élevées qui se produisent pendant l'échappement. Mais, en raison de ces effets thermiques, les longues admissions, même à des vitesses assez grandes, ne sont pas aussi défavorables qu'on pourrait le croire tout d'abord en ne considérant que la mauvaise utilisation de la vapeur.

XVIII. *Comparaison entre les résultats théoriques et les résultats obtenus dans la pratique.*

Il est intéressant d'examiner si les consommations théoriques sont d'accord avec celles qu'on constate dans le service courant. Malheureusement cette recherche ne comporte pas une très grande précision parce qu'il faut faire intervenir des coefficients insuffisamment connus, tels que les coefficients de résistance des trains et des machines, le rendement de la chaudière, etc. Il y a, en outre, des consommations d'eau dont la théorie ne peut tenir compte, par exemple celles qui résultent des entraînements d'eau par la vapeur. Mais, en définitive, les consommations accessoires ne forment qu'une faible partie de la consommation totale.

Pour vérifier les résultats théoriques, j'ai fait des expériences sur la consommation d'eau des machines qui font le service courant des trains express entre Vierzon et Limoges. Ces machines, de la série 51 à 76, sont analogues à celles qui sont étudiées dans le paragraphe précédent, et on peut leur appliquer les chiffres trouvés pour la dépense et la force développée.

Il y a deux moyens de procéder pour vérifier si la théorie est d'accord avec la pratique. On peut, connaissant le tonnage d'un train, calculer, à l'aide des coefficients de résistance, le travail que doit développer la machine pour remorquer ce train à diverses vitesses. On connaît, d'autre part, la consommation théorique d'eau par cheval-heure. On obtient ainsi théoriquement la dépense totale d'eau pour un parcours donné et on la compare avec la dépense réelle. Cette méthode a l'inconvénient de reposer sur un calcul où entrent les coefficients de résistance par tonne de train ou de machine qui sont mal connus.

Une deuxième méthode consiste à observer quels sont à chaque instant le cran de marche de la machine et la vitesse du train. Ces deux éléments suffisent pour calculer la consommation théorique correspondant à un parcours donné. Pour connaître la courbe des vitesses, je n'ai eu qu'à recueillir les résultats obtenus à l'aide des appareils enregistreurs que la compagnie d'Orléans a récemment installés sur quelques-unes de ses machines. Connaissant, à chaque instant, le cran de marche et la vitesse, on déduit aisément du tableau III du précédent paragraphe les quantités de vapeur consommées par seconde. On construit ainsi, en prenant le temps pour abscisses, une courbe dont les ordonnées représentent la dépense de vapeur pendant l'unité de temps, qui est la seconde. Il suffit de mesurer la surface comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses pour avoir la consommation de vapeur dans un temps donné.

Cette dernière méthode est d'une application très facile. Je vais indiquer les résultats qu'elle a fournis.

Mes expériences ont porté, dans le parcours de Vierzon à Limoges qui est de 200 kilomètres, sur le train n° 3 (machine n° 54) du 26 janvier, le train n° 40 (machine n° 55) du 26 janvier, et le train n° 3 (machine n° 58) du 1er février. La machine n° 58 est munie d'un appareil

enregistreur de la vitesse. Les deux autres machines ne le sont pas, mais j'ai relevé les vitesses à l'aide d'un compteur à secondes, d'après les poteaux kilométriques, et obtenu ainsi des courbes de vitesse pareilles à celles de l'appareil enregistreur.

Les quantités d'eau consommée ont été évaluées d'après les différences de hauteur de l'eau au tender et au tube de niveau.

Le tableau suivant permet de comparer les consommations d'eau théoriques et réelles des trains n°s 3 du 26 janvier et du 1er février (les hauteurs d'eau du tender et du tube de niveau n'ont été mesurées qu'aux stationnements de Vierzon, Argenton, Saint-Sébastien, Saint-Sulpice-Laurière et Limoges).

	DÉPENSE d'eau théorique	DÉPENSE observée. Train 3 du 1er février	DÉPENSE observée. Train 3 du 26 janvier
	mèt. cub.	mèt. cub.	mèt. cub.
De Vierzon à Argenton	6,418	6,600	6,498
D'Argenton à Saint-Sébastien . .	3,710	3,900	4,500
De St-Sébastien à St-Sulpice. . .	3,697	3,800	3,800
De Saint-Sulpice à Limoges. . . .	1,082	1,200	1,250

Le train n° 40 du 26 janvier (tonnage 173 tonnes), a donné des résultats analogues que nous indiquons ci-après. Les observations n'ont été faites qu'entre Limoges et Argenton, parce qu'au delà d'Argenton il faisait nuit. Les hauteurs d'eau du tender et du tube de niveau n'ont été relevées qu'au départ de Limoges et à l'arrivée à Argenton. La mesure de ces hauteurs a été faite avec beaucoup d'exactitude parce que, le stationnement à Argenton étant relativement long, j'ai pu attendre que la surface de l'eau dans le tender fut en équilibre. Au tube de niveau de la chaudière, la hauteur d'eau était à l'arrivée la même qu'au départ ; au tender, le niveau de l'eau avait

baissé de $0^m,88$, ce qui correspond à une dépense de $7^{m^3},333$.

Train n° 40 du 26 janvier.

	DÉPENSE D'EAU théorique	DÉPENSE observée
	mèt. cub.	mèt. cub.
De Limoges à Saint-Sulpice.	3,9981	»
De Saint-Sulpice à la Souterraine.	1,9444	»
De la Souterraine à Argenton.	1,2085	»
Total.	7,151	7,333

Les trains n° 3 du 26 janvier et du 1er février avaient même tonnage, 128 tonnes ; les conditions de marche de ces deux trains ont été presque identiques sur tout le parcours. Par conséquent les consommations d'eau auraient dû être sensiblement les mêmes. On voit d'après les chiffres ci-dessus qu'il en est ainsi, sauf une discordance. D'Argenton à Saint-Sébastien la dépense du 26 janvier a été anormale. Cela ne peut être attribué qu'à un entraînement excessif de l'eau par la vapeur. Au départ d'Argenton, le niveau de l'eau était très élevé dans la chaudière de la machine du train du 26 janvier (au tube de niveau la hauteur d'eau était de $0^m,20$), tandis qu'il l'était beaucoup moins dans la deuxième expérience ($0^m,15$ de hauteur au tube de niveau). C'est pour cela que l'entraînement de l'eau a été plus important dans le premier cas que dans le second.

On voit d'après les tableaux ci-dessus que la différence entre les chiffres théoriques et les chiffres réels est très faible. La théorie se trouve donc vérifiée.

Nous allons maintenant appliquer la première méthode de vérification dont nous avons parlé. Nous ne considérerons que le parcours d'Argenton à Saint-Sébastien, qui se compose uniquement de rampes de 10 millimètres et de 6 millimètres par mètre.

De cette façon, dans le calcul de la résistance d'un train, l'influence de la pesanteur sera prépondérante et les erreurs commises sur les coefficients de résistance n'auront que peu d'influence sur le résultat.

Nous prendrons, comme coefficients de résistance de la machine et des wagons, ceux qu'a donnés M. Desdouits dans la *Revue générale des chemins de fer* de mai 1890. Ces coefficients sont inférieurs à ceux généralement admis jusqu'ici, mais nous pensons qu'ils peuvent parfaitement s'appliquer à l'excellent matériel de la compagnie d'Orléans.

Le tonnage du train n° 3 du 1er février était de 128 tonnes, le poids de la machine de 72 tonnes (y compris le tender et la charge d'eau et de combustible). La *fig.* 3 de la Pl. XIV représente la courbe de la vitesse, qui peut être divisée en trois parties correspondant respectivement aux vitesses moyennes de 45, 52 et 58 kilomètres à l'heure. En outre, les deux premières parties de la courbe correspondent à une rampe de 10 millimètres par mètre (rampe continue sauf de légères variations telles que le palier de la station de Celon et deux courtes rampes de 6 millimètres) ; la dernière partie de la courbe correspond à une rampe de 6 millimètres par mètre.

Nous allons chercher quel a été le travail total effectué.

A la vitesse de 45 kilomètres à l'heure, la résistance par tonne de la machine et du tender est de $7^{kg},5$, et par tonne de train de $3^{kg},5$. Par conséquent, l'effort total à la jante est :

$$72\,(7{,}5 + 10) + 128\,(3{,}5 + 10) = 2988 \text{ kilogr.}$$

Le travail, en kilogrammètres, est :

$$2988 \cdot \frac{45000}{3600},$$

et la force en chevaux :

$$\frac{2988 \cdot 45000}{75 \cdot 3600} = 498 \text{ chevaux-vapeur.}$$

D'après les résultats théoriques exposés dans le paragraphe précédent, pour que la machine développe une force de 498 chevaux, à la vitesse de 45 kilomètres à l'heure, il faut marcher avec une admission de 31,5 p. 100, et la consommation d'eau s'élève alors à $13^{kg},35$ par cheval-heure.

Un calcul analogue au précédent donne, pour la force développée à la vitesse de 52 kilomètres à l'heure, le chiffre de 575 chevaux-vapeur; la consommation d'eau est, dans ce cas, de $13^{kg},1$ par cheval-heure.

En rampe de 6 millimètres par mètre et à la vitesse de 58 kilomètres à l'heure, on obtient pour la force développée :

$$\frac{[72(8,8+6)+128(4,2+6)]\,58000}{75 \cdot 3600} = 509 \text{ chevaux.}$$

Pour développer cette force, il faut marcher avec une admission de 26 p. 100 et la dépense est de $12^{kg},7$ par cheval-heure.

Les durées de marche aux vitesses moyennes de 45, 52 et 58 kilomètres à l'heure ont été de 12 minutes 1/2, 10 minutes et 10 minutes 1/2. Par conséquent, les consommations théoriques d'eau sont données par le calcul suivant :

$$\frac{498 \cdot 12,5 \cdot 13,35}{60} = 1385,0 \text{ kilogr.}$$

$$\frac{575 \cdot 13,1 \cdot 10,00}{60} = 1255,4$$

$$\frac{509 \cdot 12,7 \cdot 10,50}{60} = 1131,2$$

Total. . . 3771,6 kilogr.

La consommation théorique pour le parcours d'Argenton à Saint-Sébastien s'élève ainsi à $3.771^{kg},6$, tandis que la consommation réelle a été de 3.900 kilogrammes. Nous avions trouvé plus haut, d'une autre façon, pour

la consommation théorique 3.710 kilogrammes. Il y a donc accord entre les résultats obtenus.

En résumé, les résultats théoriques se trouvent confirmés par la pratique.

On voit, d'après ce qui précède, que la théorie permet d'étudier tous les problèmes qui se rattachent à la marche des trains, à l'utilisation et à la consommation des machines.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

THÉORIE DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR DANS LES PAROIS DES CYLINDRES DES MACHINES A VAPEUR.

Pages.

§ 1. Objet de l'étude 3
§ 2. Rôle des parois des cylindres. 3
§ 3. Équations différentielles du mouvement de la chaleur dans un mur. 8
§ 4. Condition particulière à laquelle est assujettie la surface extérieure. 10
§ 5. Résolution du système d'équations différentielles dans le cas où la température de la source est constante 12
§ 6. Détermination de n 14
§ 7. Détermination de a 16
§ 8. Résolution du système d'équations différentielles dans le cas où la température de la source est une fonction du temps. Lemme déduit du cas où la température de la source est constante . . . 18
§ 9. Division de la durée d'échauffement en petites périodes 21
§ 10. Détermination du coefficient h 27

CHAPITRE II.

THÉORIE DES DIAGRAMMES DES PRESSIONS.

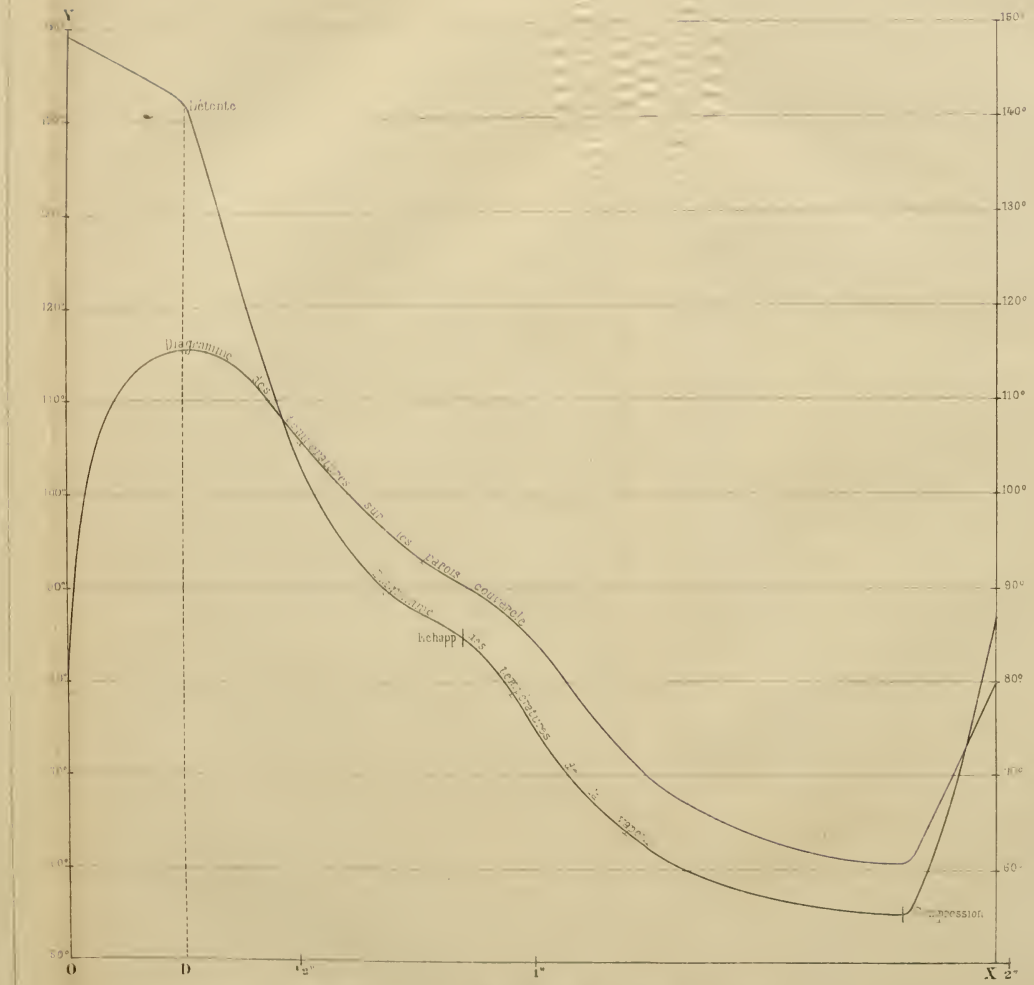
§ 11. Observations générales. 30
§ 12. Période d'admission. 31
§ 13. Période de détente. 39
§ 14. Période d'échappement 41
§ 15. Période de compression. 45
§ 16. Conclusions 45

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX LOCOMOTIVES.

§ 17. Locomotives d'express de la compagnie d'Orléans, à cylindres extérieurs et à distribution par coulisse, système Gooch 46
§ 18. Comparaison entre les résultats théoriques et les résultats obtenus dans la pratique 51

Fig. 1.



Vitesse de la machine 30 tours par minute

Fig. 2.

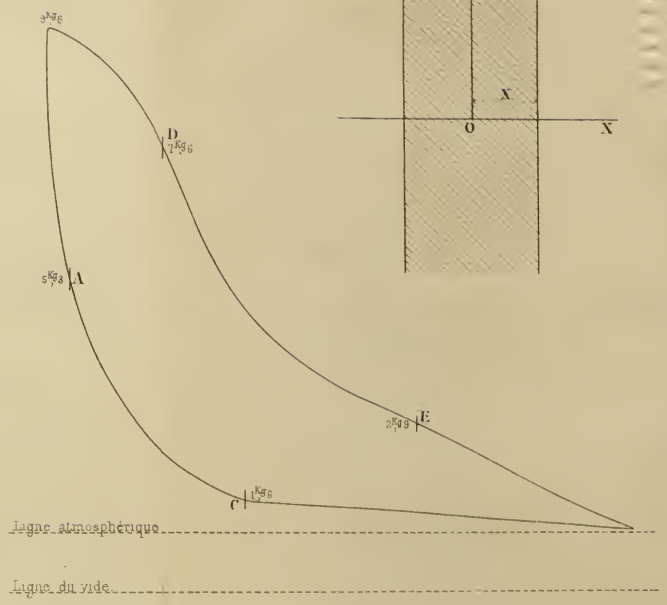


Fig. 4.

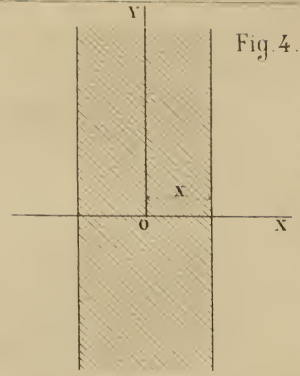
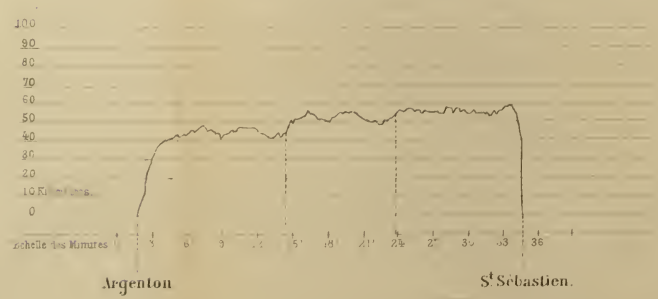


Fig. 3.



Annales des Mines, 9e Série, Tome III, pages 675 et suivantes.

Auto-Imp. L. Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris.

3 0112 077584602

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS